wykładniczym – pokazuje, że ten rozkład jest zdecydowanie gorzej dopasowany. Wskazuje to na ciężkoogonowość, której rozkład ten nie może oddać. W odróżnieniu od pierwszego dwa pozostałe testy sugerują zmianę rozkładu, przy czym, analogicznie jak na rys. 3.13, obcięty rozkład potęgowy wypada najlepiej. Może to świadczyć o tym, że sieć połączeń lotniczych jest w gruncie rzeczy typową siecią złożoną, a obserwowane nieregularności rozkładu są tylko wynikiem jej ograniczonej wielkości.

```
R, p = fit.distribution_compare('power_law', 'exponential',
                                normalized_ratio = True)
print 'power_law ? exponential: ' + str(R) + " " + str(p)

R, p = fit.distribution_compare('power_law',
                                'truncated_power_law',
                                normalized_ratio = True)
print 'power_law ? truncated_power_law: ' +
                          str(R) + " " + str(p)

R, p = fit.distribution_compare('power_law', 'lognormal',
                                normalized_ratio = True)

print 'power_law ? lognormal: ' + str(R) + " " + str(p)
```

Wydruk 3.10. Porównanie dopasowania rozkładu potęgowego z rozkładami: wykładniczym, obciętym potęgowym i lognormalnym

Tabela 3.2. Porównanie dopasowanego rozkładu potęgowego z przykładowymi rozkładami

Rozkład	Statystyka R	p-wartość
wykładniczy	17,42	$6{,}2 \cdot 10^{-68}$
obcięty potęgowy	−10,94	0
lognormalny	−7,34	$2{,}1 \cdot 10^{-13}$

3.4. Wielkości opisujące sieć

Oprócz fundamentalnych pojęć bezskalowości oraz małych światów w celu opisu sieci złożonych definiuje się również inne wskaźniki, przedstawione poniżej. Uzupełniają one zestaw definicji podanych w podrozdz. 2.2 i dobrze wpisują się w prezentację sieci jako struktur obiektów traktowanych podmiotowo – choć oczywiście mogą być i są stosowane w opisie „zwykłych” grafów.

Dokonując upodmiotowienia węzłów, formułujemy pytania dotyczące przyczyn powstania sieci w zastanej postaci. Jednym z podstawowych jest: czy para węzłów niepołączonych bezpośrednio, ale poprzez jednego, wspólnego sąsiada, przejawia skłonność do utworzenia bezpośredniego połączenia? W sieciach złożonych przeważnie tak właśnie jest, co wynika ze „społecznej” natury węzłów, tj. dążenia do ergonomii i autonomii w komunikacji, czemu niewątpliwie sprzyja utrzymywanie bezpośrednich relacji. Większość sieci złożonych, oprócz bezskalowości i krótkiej średniej ścieżki, przejawia również tendencję do posiadania dobrze połączonych grup węzłów.

Gronowanie

Pierwszą zaprezentowaną zgrubną miarą liczby połączeń była gęstość grafu (2.1). Bardziej precyzyjnym pojęciem jest *globalny współczynnik gronowania* (*global clustering coefficient*), zwany też *przechodniością* (*transitivity*) [115], definiowany jako stosunek liczby trójek węzłów w pełni powiązanych do liczby trójek powiązanych na dwóch z trzech relacji:

$$t(G) = \frac{3 \cdot \Delta(G)}{\delta(G)}, \tag{3.5}$$

gdzie $\Delta(G)$ i $\delta(G)$ oznaczają, odpowiednio, liczbę trójek połączonych w pełni[33] oraz połączonych w $\frac{2}{3}$.

Przechodniość grafu w równym stopniu uwzględnia trójki zawierające węzły o wysokim, jak i o niskim stopniu, gubiąc przy tym istotne informacje o gęstości połączeń tych ostatnich. Dlatego za bardziej odpowiedni uważa się uśredniony wskaźnik gronowania, $c(G)$, wykorzystujący pojęcie *sieci ego* (*ego network*) pierwszego stopnia $\mathcal{E}_1(G, v_i)$, tj. podgrafu złożonego z węzła v_i i jego sąsiadów (por. rys. 3.14a). W grafie ego definiujemy *lokalny współczynnik gronowania* $c_{\mathcal{E}}(v_i)$ jako iloraz liczby istniejących i wszystkich możliwych połączeń pomiędzy sąsiadami v_i. Wówczas *uśredniony lokalny wskaźnik gronowania* (*network average clustering coefficient*) wyraża się wzorem:

$$c(G) = \frac{1}{|V|} \sum_i c_{\mathcal{E}}(v_i). \tag{3.6}$$

Konstrukcja wskaźnika (3.6) uwydatnia zjawiska zachodzące dla licznych węzłów o małym stopniu[34]. Wartości obu wskaźników mogą się bardzo różnić; rys. 3.14b prezentuje scenariusz ekstremalny, prowadzący do całkowitej rozbieżności wskazań.

[33] Każdej w pełni połączonej trójce, czyli trójkątowi $A - B - C - A$, odpowiadają trzy trójki niepełne: $A - B - C$, $B - C - A$, $C - A - B$. Stąd współczynnik równy 3 w liczniku, normalizujący wartości $t(G)$ do zakresu $\langle 0; 1 \rangle$.

[34] Zauważono, że z reguły w sieciach złożonych wartość lokalnego współczynnika gronowania jest tym mniejsza, im wyższy stopień węzła ego (a dokładniej, również jest charakteryzowaną zależnością potęgową z $2 < \alpha < 3$). Jest to zjawisko naturalne: węzły-celebryci o dużym stopniu raczej są związani relacjami dwustronnymi; trudno byłoby wytworzyć pełną siatkę połączeń w ich sieciach ego. Inaczej jest na peryferiach sieci, gdzie napotykamy dobrze połączone społeczności.